

Theoretische Informatik

Emil Vinu

Aufbau

- Organisatorisches
- Tipps
- Lecture-Recap
- Kahoot (mit Preisen)
- Übungen

Ueber mich...

Organisatorisches

- Abgaben in Teams von bis zu 3 Personen
 - es gibt jeweils **nur eine** Person aus dem Team
- jeweils 50% der Punkte aus Übungen + Moodle Quizzes benötigt um für midterm / endterm zugelassen zu werden
- es gibt keinen Bonus
- es zählt: **entweder** arithmetisches Mittel aus Zwischenprüfungen **oder** Sessionsprüfung

Material

- sämtliche Kursmaterialien findet sich auf Moodle
- als Alternative zur Vorlesung: Buch von Juraj Hromkovic lesen
 - sehr nah an der Vorlesung
 - deckt alles ab

Philosophie

- Trivial = 🍦
- Keine “dummen” fragen
- Bei fragen, gerne per Whatsapp melden :)
 - Vor allem am Wochenende vor Mid- / Endterm!

Website: ti.emilvinu.ch

- Slides aus Übungsstunden
- Wichtige Links
- Sonstige Infos
- Zusatzübungen



Whatsapp-Gruppe



Recap

Alphabet

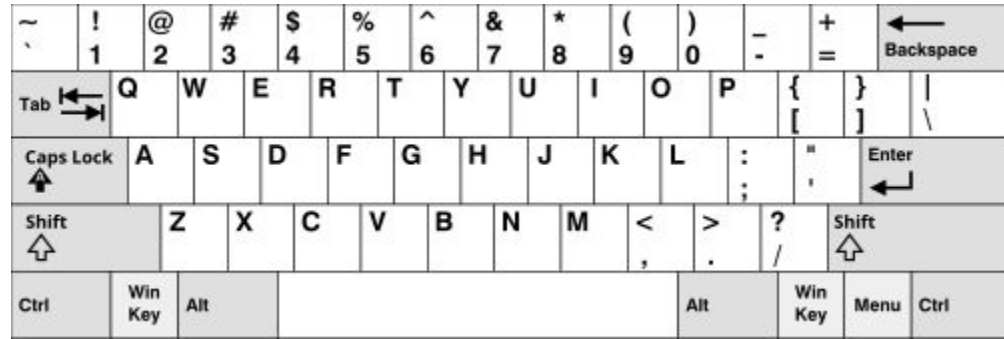
Definition 2.1. Eine endliche nichtleere Menge Σ heißt **Alphabet**. Die Elemente eines Alphabets werden **Buchstaben** (**Zeichen**, **Symbole**) genannt.

“Menge von Zeichen, mit denen wir die Wörter bauen.”

! nicht leer

! endlich

! Epsilon nicht vergessen



Wort

Definition 2.2. Sei Σ ein Alphabet. Ein **Wort** über Σ ist eine endliche (eventuell leere) Folge von Buchstaben aus Σ . Das **leere Wort** λ ist die leere Buchstabenfolge. (Manchmal benutzt man ε statt λ .)

Die **Länge** $|w|$ eines Wortes w ist die Länge des Wortes als Folge, d. h. die Anzahl der Vorkommen von Buchstaben in w .

Σ^* ist die Menge aller Wörter über Σ , $\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$.

“Wenn wir Buchstaben in einem Alphabet aneinanderhängen, bekommen wir ein Wort.”

! leeres Wort ist auch ein Wort

Zwischenfrage

Was ist der Unterschied zwischen Σ^* und Σ^+ ?

Nummer und Bin

Wörter können wir benutzen, um unterschiedliche Objekte wie zum Beispiel Zahlen, Formeln, Graphen und Programme darzustellen. Ein Wort $x = x_1x_2 \dots x_n \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$, $x_i \in \Sigma_{\text{bool}}$ für $i = 1, \dots, n$, kann als die binäre Darstellung der Zahl

$$\text{Nummer}(x) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot 2^{n-i}$$

betrachtet werden. Für eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N} - \{0\}$ bezeichnen wir mit $\text{Bin}(m) \in (\Sigma_{\text{bool}})^*$ die kürzeste¹ binäre Darstellung von m , also $\text{Nummer}(\text{Bin}(m)) = m$. Wir definieren $\text{Bin}(0) = 0$.

“Nummer liest ein Binärwort als Zahl - z.B. ist $\text{Nummer}(011) = 3$

“Bin(m) ist die kürzeste Binärdarstellung von m – also ohne führende Nullen.”

Ist das korrekt?

Für alle $x, y \in \Sigma^*$ gilt:

$$|xy| = |x \cdot y| = |x| + |y|.$$

Teilwort, Präfix, Suffix

Definition 2.6. Seien $v, w \in \Sigma^*$ für ein Alphabet Σ .

- v heißt ein **Teilwort** von $w \iff \exists x, y \in \Sigma^* : w = xvy$.
- v heißt ein **Präfix** von $w \iff \exists y \in \Sigma^* : w = vy$.
- v heißt ein **Suffix** von $w \iff \exists x \in \Sigma^* : w = xv$.
- $v \neq \lambda$ heißt ein **echtes** Teilwort (Präfix, Suffix) von w genau dann, wenn $v \neq w$ und v ein Teilwort (Präfix, Suffix) von w ist.

Teilwort = zusammenhängendes Stück irgendwo drin

Präfix = Anfang Suffix = Ende

„echt“ heißt: weder leer noch das ganze Wort.

Konkatenation über $\cup$

Lemma 2.1. *Seien L_1, L_2 und L_3 Sprachen über einem Alphabet Σ . Dann gilt*

$$L_1 L_2 \cup L_1 L_3 = L_1 (L_2 \cup L_3).$$

Verteilt sich sauber!

Konkatenation über Schnitt

Lemma 2.2. *Seien L_1, L_2, L_3 Sprachen über einem Alphabet Σ . Dann gilt*

$$L_1(L_2 \cap L_3) \subseteq L_1L_2 \cap L_1L_3.$$

! gilt nur in eine Richtung

Homomorphismus

Definition 2.10. Seien Σ_1 und Σ_2 zwei beliebige Alphabete. Ein **Homomorphismus** von Σ_1^* nach Σ_2^* ist jede Funktion $h: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ mit den folgenden Eigenschaften:

(i) $h(\lambda) = \lambda$ und

(ii) $h(uv) = h(u) \cdot h(v)$ für alle $u, v \in \Sigma_1^*$.

“Ein Homomorphismus ersetzt jeden Buchstaben durch ein *festes* Wort

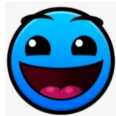
-> es reicht also, h für die einzelnen Buchstaben festzulegen”

Kahoooooot!

When you're in the top 5 on Kahoot



Aufgaben



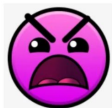
Aufgabe 1:

Seien L_1 , L_2 und L_3 Sprachen über dem Alphabet $\{0\}$. Gilt $L_1(L_2 \cap L_3) = L_1L_2 \cap L_1L_3$?



Aufgabe 2:

Aus $L_1L_2 = L_2L_1$ folgt $L_1 \subseteq L_2$ oder $L_2 \subseteq L_1$. Beweisen oder widerlegen Sie.



Aufgabe 3:

Für jedes Alphabet Σ gibt es ein n , so dass jedes Wort der Länge $\geq n$ ein Quadrat xx enthält.

Lösung Aufgabe 3

Wahr. Wir benutzen, dass L^* unter Konkatination abgeschlossen ist: Aus $u \in L^i$ und $v \in L^j$ folgt $uv \in L^{i+j} \subseteq L^*$. Außerdem gilt: Aus $A \subseteq B^*$ folgt $A^* \subseteq B^*$, denn jedes Wort aus A^* ist eine Konkatination von Wörtern aus B^* .

„ $\subseteq$ “: Sei $x \in L_1^* L_2^*$, also $x = yz$ mit $y \in L_1^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ und $z \in L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$. Wegen der Abgeschlossenheit gilt $x \in (L_1 \cup L_2)^*$. Also ist $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$, und damit folgt $(L_1^* L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

„ $\supseteq$ “: Für $x \in L_1$ gilt $x = x \cdot \lambda \in L_1^* L_2^*$, und für $x \in L_2$ gilt $x = \lambda \cdot x \in L_1^* L_2^*$. Also ist $L_1 \cup L_2 \subseteq L_1^* L_2^*$, und damit folgt $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$. $\square$

Bemerkung: Für $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$ ist das genau Aufgabe 2.13 aus dem Buch: $(\{a\}^* \{b\}^*)^* = \{a, b\}^*$.

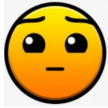
so goodbye

very
sadness much
will miss wishes

Wow



Noch eine Aufgabe



Aufgabe 4

$$(L_1^* L_2^*)^* = (L_1 \cup L_2)^*$$



Aufgabe 3:

Für jedes Alphabet Σ gibt es ein n , so dass jedes Wort der Länge $\geq n$ ein Quadrat xx enthält.

Lösung Aufgabe 4

Wahr. Wir benutzen, dass L^* unter Konkatination abgeschlossen ist: Aus $u \in L^i$ und $v \in L^j$ folgt $uv \in L^{i+j} \subseteq L^*$. Außerdem gilt: Aus $A \subseteq B^*$ folgt $A^* \subseteq B^*$, denn jedes Wort aus A^* ist eine Konkatination von Wörtern aus B^* .

„ $\subseteq$ “: Sei $x \in L_1^* L_2^*$, also $x = yz$ mit $y \in L_1^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ und $z \in L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$. Wegen der Abgeschlossenheit gilt $x \in (L_1 \cup L_2)^*$. Also ist $L_1^* L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$, und damit folgt $(L_1^* L_2^*)^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$.

„ $\supseteq$ “: Für $x \in L_1$ gilt $x = x \cdot \lambda \in L_1^* L_2^*$, und für $x \in L_2$ gilt $x = \lambda \cdot x \in L_1^* L_2^*$. Also ist $L_1 \cup L_2 \subseteq L_1^* L_2^*$, und damit folgt $(L_1 \cup L_2)^* \subseteq (L_1^* L_2^*)^*$. $\square$

Bemerkung: Für $L_1 = \{a\}$ und $L_2 = \{b\}$ ist das genau Aufgabe 2.13 aus dem Buch: $(\{a\}^* \{b\}^*)^* = \{a, b\}^*$.

Und noch eine Aufgabe



Aufgabe 5

Gibt es L_1, L_2, L_3 mit $L_1(L_2 \cap L_3)$ endlich, aber $L_1L_2 \cap L_1L_3$ unendlich?