

Theoretische Informatik

Übungsstunde 3

Emil Vinu

Aufbau

- Feedback Blatt 2
- Recap
- Kahoot
- Aufgaben

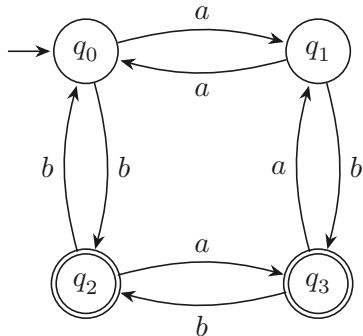
Feedback Blatt 2

Feedback Blatt 2

- Aufgabe 4 lief sehr gut, fast alle mit voller Punktzahl
- In Aufgabe 3 gingen die Punkte fast nur bei der **Begründung** verloren
 - „gerade“ und „ungerade“ an die Zustände geschrieben, aber nicht gesagt warum
- ein paar Mal: λ in der falschen Klasse

! $Kl[q]$ = Wörter, die in q landen, nicht die, die von q aus akzeptiert werden

Aufgabe 3



Sei G die Menge der Wörter gerader Länge.

$\text{Kl}[q_0]: \{xaa, xbb \mid x \in G\} \cup \{\lambda\}$

$\text{Kl}[q_1]: \{xa \mid x \in G\}$

$\text{Kl}[q_2]: \{xb \mid x \in G\}$

$\text{Kl}[q_3]: \{xab, xba \mid x \in G\}$

$L(M) = \text{Kl}[q_2] \cup \text{Kl}[q_3]$

Begründung in zwei Schritten

1. **Parität.** λ bleibt in q_0 . Jeder Buchstabe wechselt zwischen $\{q_0, q_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$. Also landen Wörter gerader Länge in q_0 oder q_3 , ungerader Länge in q_1 oder q_2 .

Begründung in zwei Schritten

1. **Parität.** λ bleibt in q_0 . Jeder Buchstabe wechselt zwischen $\{q_0, q_3\}$ und $\{q_1, q_2\}$. Also landen Wörter gerader Länge in q_0 oder q_3 , ungerader Länge in q_1 oder q_2 .
2. **Suffix.** Jedes $w \neq \lambda$ ist $w = xs$ mit $x \in G$ und $s \in \{a, b, aa, ab, ba, bb\}$. Nach x ist M in q_0 oder q_3 . Von beiden aus gilt:

s	a	b	aa	ab	ba	bb
$\hat{\delta}(q_0, s) = \hat{\delta}(q_3, s)$	q_1	q_2	q_0	q_3	q_3	q_0

→ eine Zeile pro Schritt reicht, aber das *Warum* muss dastehen

Recap

Reguläre Sprachen

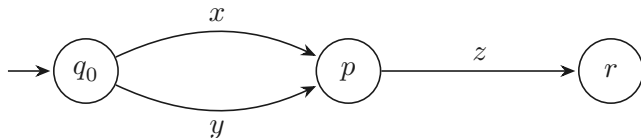
Definition 3.1. $\mathcal{L}_{\text{EA}} = \{L(M) \mid M \text{ ist ein EA}\}$ ist die Klasse der Sprachen, die von endlichen Automaten akzeptiert werden. Jede Sprache L aus $\mathcal{L}_{\text{EA}}$ wird *regulär* genannt.

- L regulär zeigen: einen EA bauen
- L nicht regulär zeigen: jeden EA ausschliessen

„Ein EA hat nur seinen Zustand als Gedächtnis. Er kann nicht beliebig weit zählen.“

Lemma 3.3

Lemma 3.3. Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA. Seien $x, y \in \Sigma^*$, $x \neq y$, so dass $(q_0, x) \vdash_A^* (p, \lambda)$ und $(q_0, y) \vdash_A^* (p, \lambda)$ für ein $p \in Q$. Dann existiert für jedes $z \in \Sigma^*$ ein $r \in Q$, so dass $xz, yz \in \text{Kl}[r]$, also gilt insbesondere $xz \in L(A) \iff yz \in L(A)$.



„Gleicher Zustand, gleiche Zukunft.“

Rezept: Nichtregularität mit Lemma 3.3

1. Annahme: Es gibt einen EA A mit $L(A) = L$.
2. Betrachte $|Q| + 1$ Wörter $x_1, \dots, x_{|Q|+1}$.
3. Schubfachprinzip: Es gibt $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, x_i) = \hat{\delta}(q_0, x_j)$.
4. Finde z mit $x_i z \in L$, aber $x_j z \notin L$ (oder umgekehrt). Widerspruch zu Lemma 3.3.

→ die Arbeit steckt in der Wahl der Wörter und von z

! i und j kennen wir nicht: z muss für **alle** $i < j$ funktionieren

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$.

Betrachte $0^1, 0^2, \dots, 0^{|Q|+1}$. Das sind mehr Wörter als Zustände, also gibt es $i < j$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, 0^i) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^j)$.

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$.

Betrachte $0^1, 0^2, \dots, 0^{|Q|+1}$. Das sind mehr Wörter als Zustände, also gibt es $i < j$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, 0^i) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^j)$.

Nach Lemma 3.3 gilt $0^i z \in L \iff 0^j z \in L$ für alle $z \in \Sigma_{\text{bool}}^*$.

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$.

Betrachte $0^1, 0^2, \dots, 0^{|Q|+1}$. Das sind mehr Wörter als Zustände, also gibt es $i < j$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, 0^i) = \hat{\delta}_A(q_0, 0^j)$.

Nach Lemma 3.3 gilt $0^i z \in L \iff 0^j z \in L$ für alle $z \in \Sigma_{\text{bool}}^*$.

Für $z = 1^i$ ist aber $0^i 1^i \in L$ und $0^j 1^i \notin L$. Widerspruch.

□

„Der Automat müsste sich die Anzahl Nullen merken.“

Zwischenfrage

$L_{sq} = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$. Wir haben $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, 0^i) = \hat{\delta}(q_0, 0^j)$.
Welches z ?

Lösung

Wähle $z = 0^{j^2+j+1}$. Dann ist

$$0^j z = 0^{j^2+2j+1} = 0^{(j+1)^2} \in L_{sq},$$

Lösung

Wähle $z = 0^{j^2+j+1}$. Dann ist

$$0^j z = 0^{j^2+2j+1} = 0^{(j+1)^2} \in L_{sq},$$

aber

$$0^i z = 0^{j^2+j+i+1} \notin L_{sq},$$

denn wegen $1 \leq i < j$ ist $j^2 < j^2 + j + i + 1 < (j+1)^2$.

„Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen liegt keine weitere.“

Pumping-Lemma

Lemma 3.4. *Sei L regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ in drei Teile y , x und z zerlegen lässt, das heisst $w = yxz$, wobei*

- (i) $|yx| \leq n_0$,
- (ii) $|x| \geq 1$ und
- (iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

! (iii) gilt auch für $w \notin L$

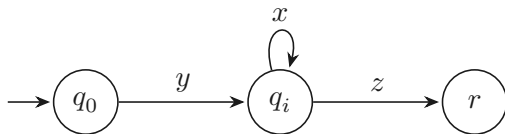
Warum?

$n_0 = |Q|$. In der Berechnung auf den ersten n_0 Buchstaben kommen $n_0 + 1$ Zustände $q_0, \dots, q_{n_0}$ vor.

Also gibt es $i < j$ mit $q_i = q_j$: eine Schleife.

y führt zur Schleife, x ist die Schleife, z ist der Rest.

„Wie oft man die Schleife läuft, sieht der Automat nicht: alle yx^kz enden in r .“



Pumping als Spiel

Um zu zeigen, dass L **nicht** regulär ist:

1. Der Gegner gibt n_0 vor. Wir kennen es nicht.
2. **Wir** wählen ein Wort w mit $|w| \geq n_0$.
3. Der Gegner wählt *irgendeine* Zerlegung $w = yxz$ mit (i) und (ii).
4. **Wir** wählen k und zeigen: yx^kz und $w = yx^1z$ liegen nicht beide in L oder beide nicht in L .

→ wir gewinnen gegen jede Zerlegung, dann ist (iii) verletzt

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma.

Wähle $w = 0^{n_0} 1^{n_0} \in L$. Es gibt eine Zerlegung $w = yxz$ mit (i)–(iii).

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma.

Wähle $w = 0^{n_0} 1^{n_0} \in L$. Es gibt eine Zerlegung $w = yxz$ mit (i)–(iii).

- Nach (i) ist $|yx| \leq n_0$, also $y = 0^l$ und $x = 0^m$.
- Nach (ii) ist $m \geq 1$.
- Weil $w \in L$, müsste nach (iii) $\{0^{n_0-m+km} 1^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten.

Beispiel: $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma.

Wähle $w = 0^{n_0} 1^{n_0} \in L$. Es gibt eine Zerlegung $w = yxz$ mit (i)–(iii).

- Nach (i) ist $|yx| \leq n_0$, also $y = 0^l$ und $x = 0^m$.
- Nach (ii) ist $m \geq 1$.
- Weil $w \in L$, müsste nach (iii) $\{0^{n_0-m+km} 1^{n_0} \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ gelten.

Aber für $k = 0$ ist $yz = 0^{n_0-m} 1^{n_0} \notin L$. Widerspruch.



Typische Fehler

- n_0 selbst festlegen, z. B. $w = 0^5 1^5$
 - w muss von n_0 abhängen
- eine bestimmte Zerlegung annehmen
 - man muss *jede* Zerlegung mit (i) und (ii) widerlegen
- ein schlechtes Wort wählen, z. B. $w = 0^{n_0}$ für $\{0^n 1^n\}$
 - kein yx^kz liegt in L , also gilt (iii)

! mit dem Pumping-Lemma kann man nie zeigen, dass L regulär ist

Zwischenfrage

Beweisen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass $L_{sq} = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N} - \{0\}\}$ nicht regulär ist. Welches w ?

Lösung

Wähle $w = 0^{n_0^2} \in L_{sq}$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Lösung

Wähle $w = 0^{n_0^2} \in L_{sq}$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Für $k = 2$ ist $yx^2z = 0^{n_0^2+m}$, und

$$n_0^2 < n_0^2 + m \leq n_0^2 + n_0 < (n_0 + 1)^2.$$

Also $yx^2z \notin L_{sq}$, aber $w \in L_{sq}$. Widerspruch zu (iii). □

→ (i) sagt, wie gross x höchstens ist

Welche Methode?

- **Lemma 3.3**

- man wählt die Wörter *und* z selbst
- keine Fallunterscheidung über Zerlegungen

- **Pumping-Lemma**

- man wählt nur w und k
- w so wählen, dass (i) die Zerlegung festnagelt

→ *beides ist ein indirekter Beweis: Annahme regulär, dann Widerspruch*

Nichtdeterminismus

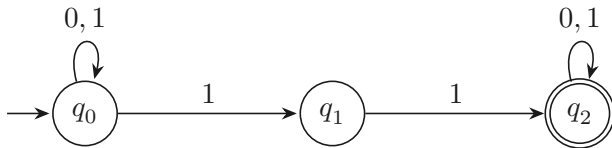
Definition 3.3. Ein nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA) ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, wobei Q , Σ , q_0 und F wie bei einem EA sind und δ eine Funktion von $Q \times \Sigma$ nach $\mathcal{P}(Q)$ ist.

- $(q, ax) \vdash_M (p, x)$, falls $p \in \delta(q, a)$
- M akzeptiert x , falls mindestens eine Berechnung auf x in (p, λ) mit $p \in F$ endet

„Der NEA rät immer richtig.“

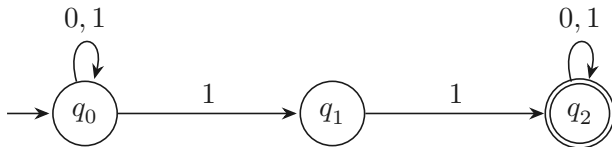
! $\delta(q, a) = \emptyset$ ist erlaubt: dann bleibt die Berechnung stecken und verwirft

Beispiel



$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}, \quad \delta(q_1, 0) = \emptyset$$

Beispiel

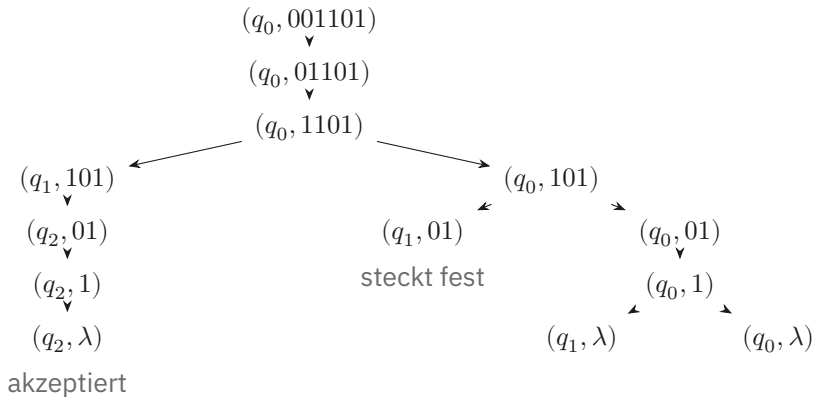


$$\delta(q_0, 1) = \{q_0, q_1\}, \quad \delta(q_1, 0) = \emptyset$$

$$L(M) = \{x11y \mid x, y \in \Sigma_{\text{bool}}^*\}$$

„In q_0 rät der NEA, wann die beiden Einsen beginnen.“

Berechnungsbaum auf 001101

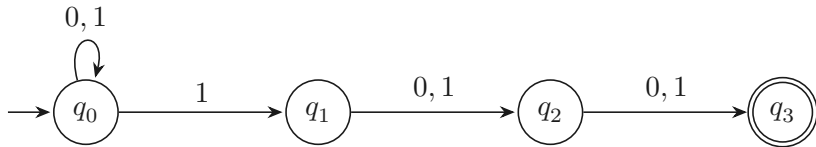


→ jeder Weg zu einem Blatt ist eine Berechnung: hier 4, eine davon akzeptiert

Zwischenfrage

Entwerfen Sie einen NEA für
 $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid \text{das drittletzte Zeichen von } w \text{ ist } 1\}$.

Lösung



„Der NEA rät, welche 1 die drittletzte ist, und prüft dann, dass genau noch zwei Zeichen kommen.“

! von q_3 geht nichts weg: kommt danach noch ein Zeichen, bleibt dieser Weg stecken

Kahoot

Kahoot!



create.kahoot.it

Aufgaben

Aufgaben



Aufgabe 1:

Zeigen Sie mit Lemma 3.3, dass $\{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.



Aufgabe 2:

Regulär oder nicht?

(a) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid \text{Nummer}(w) \text{ ist eine Zweierpotenz}\}$

(b) $\{0^n 1^m \mid n \equiv m \pmod{3}\}$



Aufgabe 3:

Sei $L = \{a^i b^j \mid i, j \in \mathbb{N}, i \neq j\}$. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass L nicht regulär ist:

(a) mit Lemma 3.3 (b) mit Lemma 3.2 und $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{L}_{\text{EA}}$

Lösung Aufgabe 1

Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$.

Betrachte $a^1, \dots, a^{|Q|+1}$. Es gibt $i < j$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, a^i) = \hat{\delta}_A(q_0, a^j)$.

Lösung Aufgabe 1

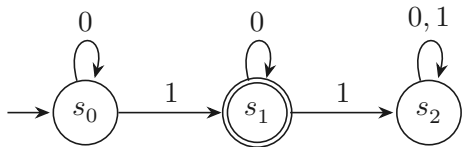
Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$.

Betrachte $a^1, \dots, a^{|Q|+1}$. Es gibt $i < j$ mit $\hat{\delta}_A(q_0, a^i) = \hat{\delta}_A(q_0, a^j)$.

Wähle $z = b^{2i}$. Dann ist $a^i b^{2i} \in L$, aber $a^j b^{2i} \notin L$, weil $2j \neq 2i$. Widerspruch zu Lemma 3.3. □

Lösung Aufgabe 2

(a) **Regulär.** Zweierpotenzen sind genau die Wörter in $\{0\}^*\{1\}\{0\}^*$.



→ nicht alles, was nach Zählen aussieht, ist nicht regulär

(b) **Regulär.** Man merkt sich nur $(n - m) \bmod 3$ und ob schon eine 1 kam.

Zustände p_0, p_1, p_2 (noch keine 1), r_0, r_1, r_2 (schon eine 1) und eine Senke. Akzeptierend: p_0, r_0 .

Lösung Aufgabe 3

(a) Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$. Unter $a^1, \dots, a^{|Q|+1}$ gibt es $i < j$ im selben Zustand. Für $z = b^i$ ist $a^i b^i \notin L$, aber $a^j b^i \in L$. Widerspruch zu Lemma 3.3.

Lösung Aufgabe 3

(a) Angenommen, A ist ein EA mit $L(A) = L$. Unter $a^1, \dots, a^{|Q|+1}$ gibt es $i < j$ im selben Zustand. Für $z = b^i$ ist $a^i b^i \notin L$, aber $a^j b^i \in L$. Widerspruch zu Lemma 3.3.

(b) Angenommen, L ist regulär. Auch $\{a\}^* \{b\}^*$ ist regulär (EA mit drei Zuständen). Nach Lemma 3.2 ist dann

$$\{a\}^* \{b\}^* - L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

regulär. Widerspruch. □

→ mit Lemma 3.2 kann man Nichtregularität weitergeben

Noch drei Aufgaben



Aufgabe 4:

Zeigen Sie mit dem Pumping-Lemma, dass $\{0^n 1^m \mid n > m\}$ nicht regulär ist.



Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass $\{0^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär ist.



Aufgabe 6:

Zeigen Sie, dass $\{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$ nicht regulär ist.

Lösung Aufgabe 4

Wähle $w = 0^{n_0+1}1^{n_0} \in L$. Nach (i) und (ii) ist $y = 0^l$, $x = 0^m$ mit $m \geq 1$.

Lösung Aufgabe 4

Wähle $w = 0^{n_0+1}1^{n_0} \in L$. Nach (i) und (ii) ist $y = 0^l$, $x = 0^m$ mit $m \geq 1$.

Für $k = 0$ ist $yz = 0^{n_0+1-m}1^{n_0}$. Wegen $n_0 + 1 - m \leq n_0$ ist $yz \notin L$.

Aber $w = yx^1z \in L$. Widerspruch zu (iii). □

„Aufpumpen bringt hier nichts, also abpumpen.“

! $k = 0$ ist erlaubt, denn $0 \in \mathbb{N}$

Lösung Aufgabe 5

Wähle $w = 0^{2^{n_0}} \in L$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Lösung Aufgabe 5

Wähle $w = 0^{2^{n_0}} \in L$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Für $k = 2$ ist $|yx^2z| = 2^{n_0} + m$, und

$$2^{n_0} < 2^{n_0} + m \leq 2^{n_0} + n_0 < 2^{n_0} + 2^{n_0} = 2^{n_0+1}.$$

Also $yx^2z \notin L$, aber $w \in L$. Widerspruch zu (iii). □

„Wie bei den Quadratzahlen: die Lücken werden immer grösser.“

Lösung Aufgabe 6

Wähle eine Primzahl $p \geq n_0 + 2$ und $w = 0^p \in L$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Lösung Aufgabe 6

Wähle eine Primzahl $p \geq n_0 + 2$ und $w = 0^p \in L$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Für $k = p - m$ ist

$$|yx^kz| = (p - m) + (p - m) \cdot m = (p - m)(1 + m).$$

Lösung Aufgabe 6

Wähle eine Primzahl $p \geq n_0 + 2$ und $w = 0^p \in L$. Nach (i) und (ii) ist $x = 0^m$ mit $1 \leq m \leq n_0$.

Für $k = p - m$ ist

$$|yx^kz| = (p - m) + (p - m) \cdot m = (p - m)(1 + m).$$

Beide Faktoren sind mindestens 2, denn $p - m \geq p - n_0 \geq 2$ und $1 + m \geq 2$.

Also ist $|yx^kz|$ keine Primzahl, $yx^kz \notin L$, aber $w \in L$. □

„k so wählen, dass die Länge einen Faktor bekommt.“

Bis nächste Woche!