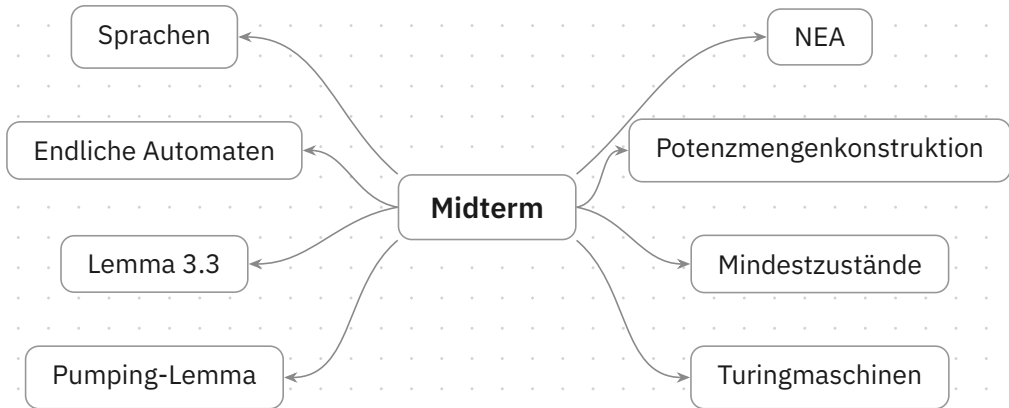


Theoretische Informatik

Übungsstunde 4

Emil Vinu

Midterm Roadmap (bisher)



Aufbau

- Feedback Blatt 3
- Lemma 3.3 vs. Pumping-Lemma
- Recap
- Kahoot
- Kahoot-Nachbesprechung letzte Stunde
- Aufgaben

Feedback Blatt 3

Feedback Blatt 3

- Lief gut: Die meisten Gruppen hatten volle oder fast volle Punktzahl
- In 5b und 6 gingen die meisten Punkte bei (iii) verloren
 - gezeigt, dass $yx^kz \notin L$, aber nicht gesagt: wegen $w \in L$ müsste $yx^kz \in L$ sein
- 5a: ein paar Mal Wörter und z , die gar nichts trennen
- 6: n_0 selbst gewählt, oder angenommen, dass die Lücken immer grösser werden
 - n_0 kommt vom Gegner, wir wählen i abhängig von n_0
 - die Lücken sind nur nach unten beschränkt

Aufgabe 6

Sei $L = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0\}^*$ unendlich mit $|w_{i+1}| > |w_i|$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

$$|w_{i+1}| - |w_i| \geq \log_2 \log_2 i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Aufgabe 6

Sei $L = \{w_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \{0\}^*$ unendlich mit $|w_{i+1}| > |w_i|$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und

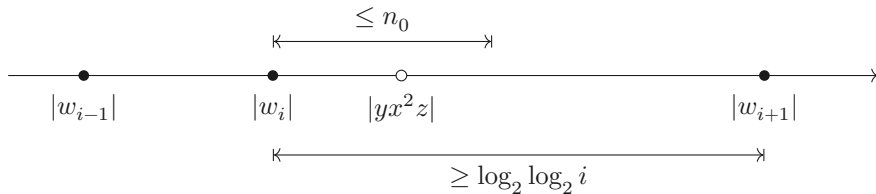
$$|w_{i+1}| - |w_i| \geq \log_2 \log_2 i \quad \text{für alle } i \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.

Warum das Pumping-Lemma?

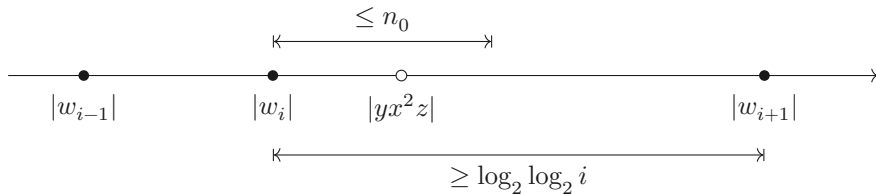
- Wir kennen L nicht genau, nur eine untere Schranke für die Lücken.
- Über $\{0\}$ ist ein Wort nur seine Länge: $|yx^kz| = |w| + (k-1)|x|$.

Aufgabe 6: die Idee



Ist die Lücke nach w_i grösser als n_0 , dann ist $|w_i| < |yx^2z| \leq |w_i| + n_0 < |w_{i+1}|$.

Aufgabe 6: die Idee



Ist die Lücke nach w_i grösser als n_0 , dann ist $|w_i| < |yx^2z| \leq |w_i| + n_0 < |w_{i+1}|$.

Wann ist die Lücke grösser als n_0 ?

$$\log_2 \log_2 i > n_0 \iff \log_2 i > 2^{n_0} \iff i > 2^{2^{n_0}}$$

Aufgabe 6: der Beweis

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma. Wähle $i > 2^{2^{n_0}}$ und $w = w_i$.

- $|w_i| \geq i > 2^{2^{n_0}} > n_0$, denn die Längen wachsen strikt: $|w_{j+1}| \geq |w_j| + 1$.

Aufgabe 6: der Beweis

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma. Wähle $i > 2^{2^{n_0}}$ und $w = w_i$.

- $|w_i| \geq i > 2^{2^{n_0}} > n_0$, denn die Längen wachsen strikt: $|w_{j+1}| \geq |w_j| + 1$.
- Nach (i) und (ii) ist $w_i = yxz$ mit $1 \leq |x| \leq n_0$. Wegen $w_i \in L$ folgt aus (iii) $yx^2z \in L$.

Aufgabe 6: der Beweis

Angenommen, L ist regulär, und n_0 ist die Konstante aus dem Pumping-Lemma. Wähle $i > 2^{2^{n_0}}$ und $w = w_i$.

- $|w_i| \geq i > 2^{2^{n_0}} > n_0$, denn die Längen wachsen strikt: $|w_{j+1}| \geq |w_j| + 1$.
- Nach (i) und (ii) ist $w_i = yxz$ mit $1 \leq |x| \leq n_0$. Wegen $w_i \in L$ folgt aus (iii) $yx^2z \in L$.
- Wegen $i > 2^{2^{n_0}} \geq 2$ gilt die Bedingung für i , also

$$|w_i| < |w_i| + |x| = |yx^2z| \leq |w_i| + n_0 < |w_i| + \log_2 \log_2 i \leq |w_{i+1}|.$$

- Weil die Längen strikt wachsen, hat kein Wort aus L eine Länge echt zwischen $|w_i|$ und $|w_{i+1}|$. Also $yx^2z \notin L$. Widerspruch zu (iii).



Lemma 3.3 vs. Pumping-Lemma

Lemma 3.3 reicht immer

Satz (Myhill-Nerode, nicht im Buch). L ist nicht regulär $\iff$ es gibt unendlich viele Wörter $x_1, x_2, \dots$, so dass es für alle $i < j$ ein z gibt mit $x_i z \in L \iff x_j z \notin L$.

Lemma 3.3 reicht immer

Satz (Myhill-Nerode, nicht im Buch). L ist nicht regulär $\iff$ es gibt unendlich viele Wörter $x_1, x_2, \dots$, so dass es für alle $i < j$ ein z gibt mit $x_i z \in L \iff x_j z \notin L$.

$\Leftarrow$: Das ist genau das Rezept mit Lemma 3.3. Nimm $x_1, \dots, x_{|Q|+1}$.

Lemma 3.3 reicht immer

Satz (Myhill-Nerode, nicht im Buch). L ist nicht regulär $\iff$ es gibt unendlich viele Wörter $x_1, x_2, \dots$, so dass es für alle $i < j$ ein z gibt mit $x_i z \in L \iff x_j z \notin L$.

$\Leftarrow$: Das ist genau das Rezept mit Lemma 3.3. Nimm $x_1, \dots, x_{|Q|+1}$.

$\Rightarrow$: Sei $x \sim y$, falls $xz \in L \iff yz \in L$ für alle z . Gibt es keine solchen unendlich vielen Wörter, dann hat $\sim$ nur endlich viele Klassen $[x]$, und das ist ein EA:

$$Q = \{[x] \mid x \in \Sigma^*\}, \quad q_0 = [\lambda], \quad \delta([x], a) = [xa], \quad F = \{[x] \mid x \in L\}$$

Es gilt $\hat{\delta}(q_0, w) = [w]$, also $L(A) = L$.

$\rightarrow$ jede Nichtregularität lässt sich mit Lemma 3.3 zeigen, mit dem Pumping-Lemma nicht

Pumping-Lemma reicht nicht immer

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ beginnt mit } d \text{ oder mit } cc\} \cup \{cd a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Pumping-Lemma reicht nicht immer

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ beginnt mit } d \text{ oder mit } cc\} \cup \{cd a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nicht regulär (Lemma 3.3): Betrachte $cd a^1, \dots, cd a^{|Q|+1}$. Es gibt $i < j$ im gleichen Zustand. Für $z = b^i$ ist $cd a^i b^i \in L$, aber $cd a^j b^i \notin L$. Widerspruch.

Pumping-Lemma reicht nicht immer

$$L = \{w \in \{a, b, c, d\}^* \mid w \text{ beginnt mit } d \text{ oder mit } cc\} \cup \{cd a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Nicht regulär (Lemma 3.3): Betrachte $cd a^1, \dots, cd a^{|Q|+1}$. Es gibt $i < j$ im gleichen Zustand. Für $z = b^i$ ist $cd a^i b^i \in L$, aber $cd a^j b^i \notin L$. Widerspruch.

Aber L erfüllt (i), (ii) und (iii) mit $n_0 = 4$. Das Pumping-Lemma findet also keinen Widerspruch.

„Das Pumping-Lemma pumpt nur vorne, und vorne kann sich L immer retten.“

→ Pumping-Lemma: nur notwendig für regulär, nicht hinreichend

Warum erfüllt L das Pumping-Lemma?

Sei $w = w_1w_2 \dots$ mit $|w| \geq 4$. Immer ist $|yx| \leq 4$ und $|x| = 1$.

w	y	x	alle yx^kz
$d \dots$	d	w_2	$\in L$ Anfang bleibt
$cc \dots$	cc	w_3	$\in L$ Anfang bleibt
$a \dots, b \dots$	w_1	w_2	$\notin L$ Anfang bleibt
$ca \dots, cb \dots$	w_1w_2	w_3	$\notin L$ Anfang bleibt
$cdc \dots, cdd \dots$	$w_1w_2w_3$	w_4	$\notin L$ Anfang bleibt

Warum erfüllt L das Pumping-Lemma?

Sei $w = w_1 w_2 \dots$ mit $|w| \geq 4$. Immer ist $|yx| \leq 4$ und $|x| = 1$.

w	y	x	alle $yx^k z$
$d \dots$	d	w_2	$\in L$ Anfang bleibt
$cc \dots$	cc	w_3	$\in L$ Anfang bleibt
$a \dots, b \dots$	w_1	w_2	$\notin L$ Anfang bleibt
$ca \dots, cb \dots$	$w_1 w_2$	w_3	$\notin L$ Anfang bleibt
$cdc \dots, cdd \dots$	$w_1 w_2 w_3$	w_4	$\notin L$ Anfang bleibt
$cd a^n b^n$	λ	c	$\in L$ $k = 0: d \dots, k \geq 2: cc \dots$
$cda \dots, cdb \dots \notin L$	c	d	$\notin L$ $k = 0: ca \dots, cb \dots, k \geq 2: cdd \dots$

Recap

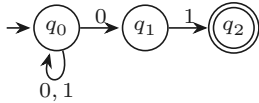
$\hat{\delta}$ beim NEA

Definition 3.3. Zu der Übergangsfunktion δ definieren wir die Funktion $\hat{\delta}$ von $Q \times \Sigma^*$ in $\mathcal{P}(Q)$ wie folgt:

- (i) $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$ für jedes $q \in Q$,
- (ii) $\hat{\delta}(q, wa) = \{p \in Q \mid \text{es existiert ein } r \in \hat{\delta}(q, w), \text{ so dass } p \in \delta(r, a)\}$
 $= \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q, w)} \delta(r, a) \quad \text{für alle } q \in Q, a \in \Sigma, w \in \Sigma^*.$

„ $\hat{\delta}(q_0, w)$ sind alle Zustände, in denen der NEA nach w sein kann:
eine Ebene im Berechnungsbaum.“

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum

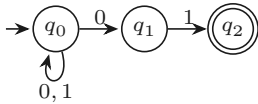


NEA: endet auf 01

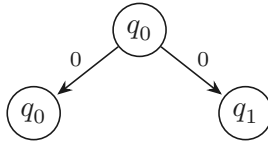


$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum



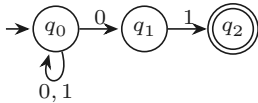
NEA: endet auf 01



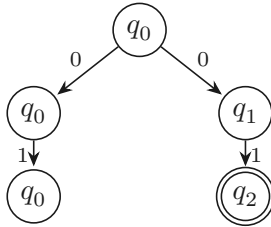
$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum



NEA: endet auf 01

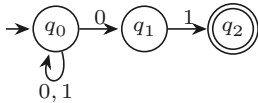


$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

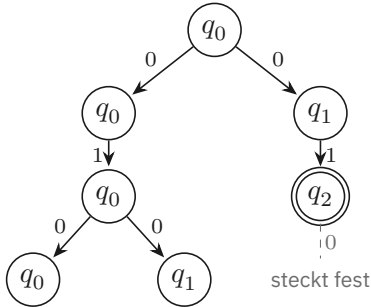
$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_2\}$$

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum



NEA: endet auf 01



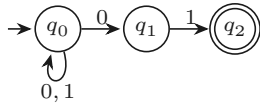
$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

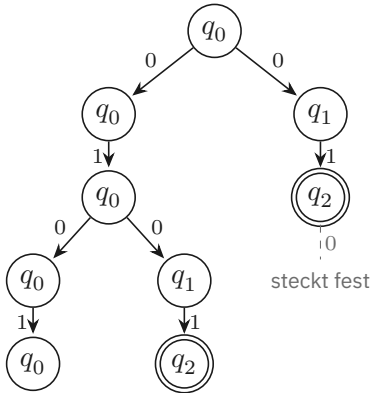
$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_2\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 010) = \{q_0, q_1\}$$

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum



NEA: endet auf 01



$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

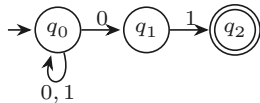
$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_2\}$$

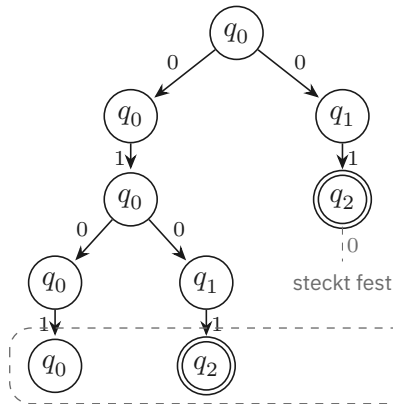
$$\hat{\delta}(q_0, 010) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0101) = \{q_0, q_2\}$$

$\hat{\delta}$ als Ebene im Berechnungsbaum



NEA: endet auf 01



$$\hat{\delta}(q_0, \lambda) = \{q_0\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 01) = \{q_0, q_2\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 010) = \{q_0, q_1\}$$

$$\hat{\delta}(q_0, 0101) = \{q_0, q_2\}$$

$\rightarrow q_2 \in F$ liegt auf der letzten Ebene, also $0101 \in L(M)$

Potenzmengenkonstruktion

Satz 3.2. *Zu jedem NEA M existiert ein EA A , so dass $L(M) = L(A)$.*

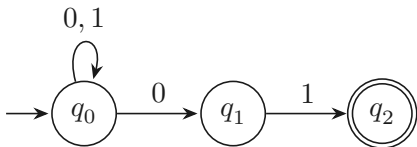
Für $M = (Q, \Sigma, \delta_M, q_0, F)$ baut man $A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_{0A}, F_A)$ mit

- $Q_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q\}, \quad q_{0A} = \langle \{q_0\} \rangle$
- $F_A = \{\langle P \rangle \mid P \subseteq Q \text{ und } P \cap F \neq \emptyset\}$
- $\delta_A(\langle P \rangle, a) = \langle \bigcup_{p \in P} \delta_M(p, a) \rangle$

„Der EA merkt sich die Menge aller Zustände, in denen der NEA gerade sein könnte.“

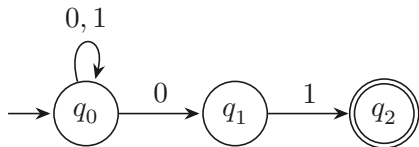
→ Beweis: $\hat{\delta}_A(q_{0A}, x) = \langle \hat{\delta}_M(q_0, x) \rangle$ mit Induktion über $|x|$

Beispiel: Wörter, die auf 01 enden



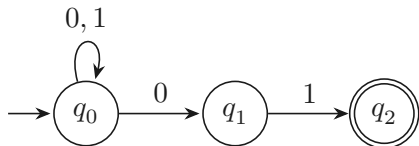
	0	1
$\langle \{q_0\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$

Beispiel: Wörter, die auf 01 enden



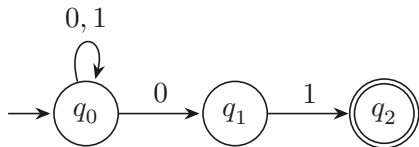
	0	1
$\langle \{q_0\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$
$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_2\} \rangle$

Beispiel: Wörter, die auf 01 enden



	0	1
$\langle \{q_0\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$
$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_2\} \rangle$
$\langle \{q_0, q_2\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$

Beispiel: Wörter, die auf 01 enden

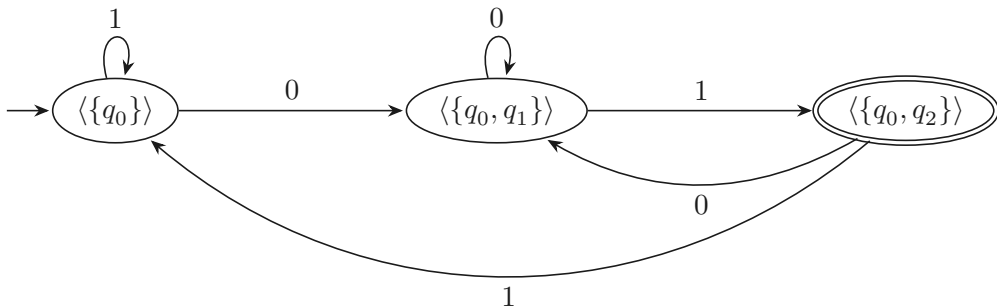


	0	1
$\langle \{q_0\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$
$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_2\} \rangle$
$\langle \{q_0, q_2\} \rangle$	$\langle \{q_0, q_1\} \rangle$	$\langle \{q_0\} \rangle$

→ bei $\langle \{q_0\} \rangle$ anfangen, für jede neue Menge eine neue Zeile

! kommt $\emptyset$ heraus, ist $\langle \emptyset \rangle$ ein ganz normaler Zustand: eine Senke

Der EA



$\rightarrow \langle\{q_0, q_1\}\rangle$: zuletzt 0 gelesen, $\langle\{q_0, q_2\}\rangle$: zuletzt 01 gelesen

„Die Menge ist alles, was der NEA gerade noch für möglich hält.“

Mindestzustandsanzahl

Wie viele Zustände braucht ein EA für $L = \{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid w \text{ endet auf } 01\}$ mindestens?

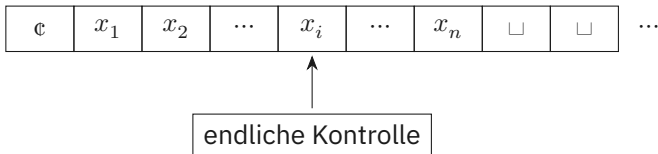
Lösung

Wie viele Zustände braucht ein EA für $L = \{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid w \text{ endet auf } 01\}$ mindestens?

	λ	0	01
λ	–	1	λ
0	–	–	λ
01	–	–	–

→ für „genau m “: untere Schranke und ein EA mit m Zuständen

Turingmaschine



Pro Schritt:

- Zustand wechseln
- Symbol schreiben
- Kopf bewegen: L, R oder N

→ wie ein EA, aber mit Schreiben, Zurückgehen und unendlichem Band

Definition 4.1

$$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}})$$

Q	Zustände
Σ	Eingabealphabet, ohne ϵ und $\sqcup$
$\Gamma \supseteq \Sigma \cup \{\epsilon, \sqcup\}$	Arbeitsalphabet
$q_0, q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}$	Start, akzeptieren, verwerfen

Übergänge: $\delta: (Q - \{q_{\text{accept}}, q_{\text{reject}}\}) \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, N\}$

! ϵ wird nie überschrieben, und links davon geht es nicht weiter

Konfiguration und Schritt

Konfiguration $\mathfrak{c} u q a v$: Zustand q , der Kopf liest a . Start: $q_0 \mathfrak{c} x$

$$\delta(q, a) = (p, b, R): \quad \mathfrak{c} u q a v \vdash_M \mathfrak{c} u b p v$$

$$\delta(q, a) = (p, b, L): \quad \mathfrak{c} u c q a v \vdash_M \mathfrak{c} u p c b v$$

$$\delta(q, a) = (p, b, N): \quad \mathfrak{c} u q a v \vdash_M \mathfrak{c} u p b v$$

→ der Zustand steht direkt links vom Symbol unter dem Kopf

! geht der Kopf über das rechte Ende hinaus, kommt ein $\square$ dazu

Berechnung und Sprache

Die Berechnung von M auf x startet in q_0 und

- akzeptiert (erreicht q_{accept}),
- verwirft (erreicht q_{reject}),
- oder läuft unendlich lange.

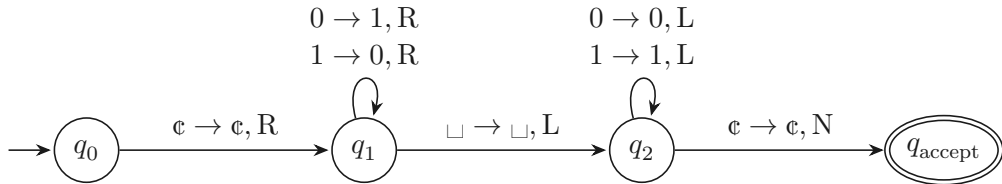
$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid M \text{ akzeptiert } w\}$$

$$\mathcal{L}_{\text{RE}} \quad L = L(M) \text{ für eine TM}$$

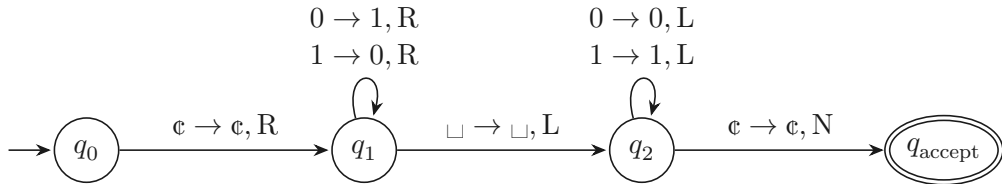
$$\mathcal{L}_{\text{R}} \quad L = L(M) \text{ für eine TM, die immer hält}$$

*! $x \notin L(M)$ heisst: M verwirft **oder** läuft unendlich lange*

Beispiel: Bits vertauschen



Beispiel: Bits vertauschen

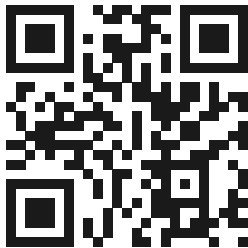


$$\begin{aligned}
 q_0 c 0 1 \vdash_M c q_1 0 1 \vdash_M c 1 q_1 1 \vdash_M c 1 0 q_1 \square \vdash_M c 1 q_2 0 \square \\
 \vdash_M c q_2 1 0 \square \vdash_M q_2 c 1 0 \square \vdash_M q_{\text{accept}} c 1 0 \square
 \end{aligned}$$

→ hin: Bits vertauschen, zurück: zum $\mathbb{C}$ laufen

Kahoot

Kahoot!



<https://kahoot.it>

Kahoot-Nachbesprechung
letzte Stunde

Frage 11: Welche ist nicht regulär?

- a) $\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$
- c) $\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$
- d) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$

Frage 11: Welche ist nicht regulär?

- a) $\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$ regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$
- c) $\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$
- d) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$

Frage 11: Welche ist nicht regulär?

- a) $\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$ regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$
- c) $\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$ regulär
- d) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$

Frage 11: Welche ist nicht regulär?

- a) $\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$ regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$
- c) $\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$ regulär
- d) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$ regulär

Frage 11: Welche ist nicht regulär?

- a) $\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$ regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$ nicht regulär**
- c) $\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$ regulär
- d) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$ regulär

→ *beschränkt zählen geht, unbeschränkt vergleichen nicht*

Frage 11 a): regulär

$$\{0^n 1^m \mid n \leq 1000 \text{ und } m \geq n\}$$

Ein EA zählt die Nullen bis höchstens 1000 und hakt danach mindestens so viele Einsen ab.

Frage 11 c): regulär

$$\{0^n 1^m \mid n \cdot m \text{ ist gerade}\}$$

$n \cdot m$ ist genau dann gerade, wenn n oder m gerade ist, also merkt sich ein EA nur zwei Paritäten.

Frage 11 d): regulär

$$\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 - |w|_1 \text{ ist durch } 1000 \text{ teilbar}\}$$

Ein EA mit 1000 Zuständen merkt sich die Differenz $|w|_0 - |w|_1$ modulo 1000.

Frage 11 b): nicht regulär

$$\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 \leq 1000 \cdot |w|_1\}$$

Lemma 3.3 mit den Wörtern 0^{1000i} : Für $i < j$ trennt $z = 1^i$, denn $0^{1000i}1^i \in L$, aber $0^{1000j}1^i \notin L$.

Frage 13: L_1 nicht regulär, L_2 regulär

Beide über Σ . Was gilt sicher?

- a) $L_1 \cup L_2$ ist nicht regulär
- b) $L_1 \cap L_2$ ist nicht regulär
- c) $L_1 L_2$ ist nicht regulär
- d) $\Sigma^* - L_1$ ist nicht regulär

Frage 13: L_1 nicht regulär, L_2 regulär

Beide über Σ . Was gilt sicher?

- a) $L_1 \cup L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \Sigma^*$
- b) $L_1 \cap L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \emptyset$
- c) $L_1 L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \emptyset$
- d) $\Sigma^* - L_1$ ist nicht regulär

Frage 13: L_1 nicht regulär, L_2 regulär

Beide über Σ . Was gilt sicher?

- a) $L_1 \cup L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \Sigma^*$
- b) $L_1 \cap L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \emptyset$
- c) $L_1 L_2$ ist nicht regulär falsch: $L_2 = \emptyset$
- d) $\Sigma^* - L_1$ ist nicht regulär **gilt immer****

d): Wäre $\Sigma^* - L_1$ regulär, dann auch sein Komplement L_1 .

→ Komplement erhält Nichtregularität, $\cup$, $\cap$ und Konkatination nicht

Frage 13: ohne $\emptyset$ und Σ^*

	L_1	L_2	Ergebnis
a) $L_1 \cup L_2$	$\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}^* \{1\}^*$	$\{0\}^* \{1\}^*$
b) $L_1 \cap L_2$	$\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{1\}^*$	$\{\lambda\}$

Frage 13: ohne $\emptyset$ und Σ^*

	L_1	L_2	Ergebnis
a) $L_1 \cup L_2$	$\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{0\}^* \{1\}^*$	$\{0\}^* \{1\}^*$
b) $L_1 \cap L_2$	$\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$	$\{1\}^*$	$\{\lambda\}$
c) $L_1 L_2$	$\{0^p \mid p \text{ ist eine Primzahl}\}$	$\{0\}^*$	$\{0^m \mid m \geq 2\}$

„Reguläre Sprache überdeckt schwierige Struktur.“

Frage 14: Drittleztes Zeichen

Wie viele Zustände braucht ein EA mindestens für

$$L = \{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid \text{das drittlezte Zeichen von } w \text{ ist } 1\}?$$

- a) 4
- b) 6
- c) 8
- d) 9

Frage 14: Drittleztes Zeichen

Wie viele Zustände braucht ein EA mindestens für

$$L = \{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid \text{das drittlezte Zeichen von } w \text{ ist } 1\}?$$

- a) 4 so viele hat der NEA, gefragt war ein **EA**
- b) 6
- c) 8 L_3 aus der Vorlesung, Lemma 3.6
- d) 9

Frage 14: Ein EA mit 8 Zuständen

q	000	001	010	011	100	101	110	111
0	000	010	100	110	000	010	100	110
1	001	011	101	111	001	011	101	111

Akzeptierend: fett

→ k -letztes Zeichen: NEA mit $k + 1$ Zuständen, EA braucht 2^k

Frage 16: Wann ist L^* regulär?

Für welche Sprache L ist L^* regulär?

- a) $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$
- c) $\{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$
- d) $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Frage 16: Wann ist L^* regulär?

Für welche Sprache L ist L^* regulär?

- a) $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$ nicht regulär
- c) $\{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$
- d) $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär

Frage 16: Wann ist L^* regulär?

Für welche Sprache L ist L^* regulär?

- a) $\{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär
- b) $\{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$ nicht regulär
- c) $\{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$ **regulär**: $0 \in L$, also $L^* = \{0\}^*$
- d) $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nicht regulär

Frage 16 a): L^* nicht regulär

$$L = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$L^* \cap \{0\}^* \{1\}^* = L$ ist nicht regulär, also nach Lemma 3.2 auch L^* nicht.

Lemma 3.2. Sei Σ ein Alphabet und seien $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ zwei EA. Für jede Mengenoperation $\odot \in \{\cup, \cap, -\}$ existiert ein EA M , so dass $L(M) = L(M_1) \odot L(M_2)$.

Frage 16 b): L^* nicht regulär

$$L = \{w \in \Sigma_{\text{bool}}^* \mid |w|_0 = |w|_1\}$$

Es ist $L^* = L$, und $L \cap \{0\}^*\{1\}^* = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist nicht regulär.

Frage 16 c): L^* regulär

$$L = \{0^{n^2} \mid n \geq 1\}$$

Wegen $0 = 0^{1^2} \in L$ ist $L^* = \{0\}^*$, und das ist regulär.

Frage 16 d): L^* nicht regulär

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$L^* \cap \{a\}^* \{b\}^* \{c\}^* = L$ ist nicht regulär, also nach Lemma 3.2 auch L^* nicht.

Lemma 3.2. Sei Σ ein Alphabet und seien $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_{01}, F_1)$ und $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_{02}, F_2)$ zwei EA. Für jede Mengenoperation $\odot \in \{\cup, \cap, -\}$ existiert ein EA M , so dass $L(M) = L(M_1) \odot L(M_2)$.

Frage 17: NEA-Zustände vertauschen

Man vertauscht in einem NEA M akzeptierende und nicht akzeptierende Zustände und erhält M' . Was gilt?

- a) $L(M') = \Sigma^* - L(M)$
- b) $L(M) \cap L(M') = \emptyset$
- c) $L(M) \cup L(M') = \Sigma^*$
- d) keine dieser Aussagen gilt im Allgemeinen

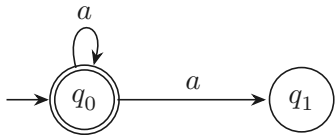
Frage 17: NEA-Zustände vertauschen

Man vertauscht in einem NEA M akzeptierende und nicht akzeptierende Zustände und erhält M' . Was gilt?

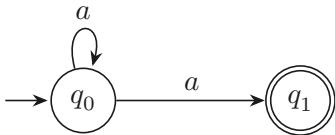
- a) $L(M') = \Sigma^* - L(M)$
- b) $L(M) \cap L(M') = \emptyset$
- c) $L(M) \cup L(M') = \Sigma^*$
- d) **keine dieser Aussagen gilt im Allgemeinen**

Frage 17: Ein Gegenbeispiel

M über $\Sigma = \{a, b\}$

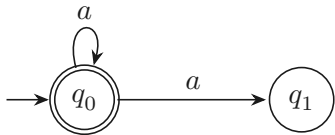


M'



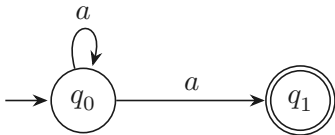
Frage 17: Ein Gegenbeispiel

M über $\Sigma = \{a, b\}$



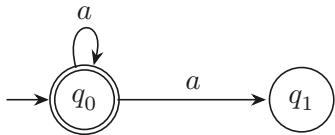
- a liegt in beiden, also ist
b) $L(M) \cap L(M') = \emptyset$ falsch

M'

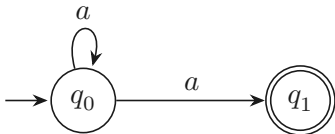


Frage 17: Ein Gegenbeispiel

M über $\Sigma = \{a, b\}$



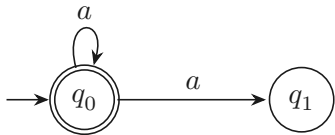
M'



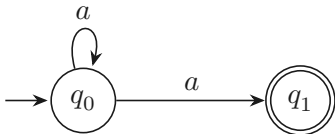
- a liegt in beiden, also ist
b) $L(M) \cap L(M') = \emptyset$ falsch
- b liegt in keiner, also ist
c) $L(M) \cup L(M') = \Sigma^*$ falsch

Frage 17: Ein Gegenbeispiel

M über $\Sigma = \{a, b\}$



M'



- a liegt in beiden, also ist
b) $L(M) \cap L(M') = \emptyset$ falsch
- b liegt in keiner, also ist
c) $L(M) \cup L(M') = \Sigma^*$ falsch
- damit ist auch
a) $L(M') = \Sigma^* - L(M)$ falsch

Frage 17: Warum klappt es beim EA?

EA: genau eine Berechnung, die immer das ganze Wort liest.

Frage 17: Warum klappt es beim EA?

EA: genau eine Berechnung, die immer das ganze Wort liest.

NEA:

- eine Berechnung endet in F , eine nicht $\Rightarrow x$ in beiden Sprachen
- alle Berechnungen stecken fest $\Rightarrow x$ in keiner

$\rightarrow$ Komplement eines NEA: zuerst in einen EA umwandeln

Aufgaben

Aufgaben



Aufgabe 1:

Entwerfen Sie einen NEA mit drei Zuständen für $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ beginnt mit } a \text{ und endet auf } b\}$. Wenden Sie dann die Potenzmengenkonstruktion an (nur die erreichbaren Zustände).



Aufgabe 2:

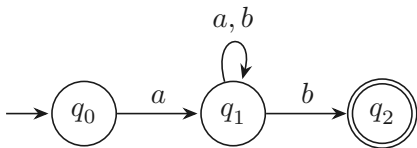
Zeigen Sie, dass jeder EA für die Sprache L aus Aufgabe 1 mindestens 4 Zustände hat.



Aufgabe 3:

Sei L regulär. Zeigen Sie, dass auch $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$ regulär ist. Dabei ist w^R das Wort w rückwärts gelesen.

Lösung Aufgabe 1



	a	b
$\langle \{q_0\} \rangle$	$\langle \{q_1\} \rangle$	$\langle \emptyset \rangle$
$\langle \{q_1\} \rangle$	$\langle \{q_1\} \rangle$	$\langle \{q_1, q_2\} \rangle$
$\langle \{\mathbf{q_1}, \mathbf{q_2}\} \rangle$	$\langle \{q_1\} \rangle$	$\langle \{q_1, q_2\} \rangle$
$\langle \emptyset \rangle$	$\langle \emptyset \rangle$	$\langle \emptyset \rangle$

fett: akzeptierend

! $\langle \emptyset \rangle$ nicht vergessen: Dort landen alle Wörter, die mit b beginnen.

Lösung Aufgabe 2

	λ	a	b	ab
λ	—	b	ab	λ
a	—	—	b	λ
b	—	—	—	λ
ab	—	—	—	—

Lösung Aufgabe 3

Idee: im EA für L alle Kanten umdrehen, in F starten, in q_0 akzeptieren.

Lösung Aufgabe 3

Idee: im EA für L alle Kanten umdrehen, in F starten, in q_0 akzeptieren.

Problem: mehrere Startzustände. Lösung: neuer Start s , der sich wie ganz F verhält.

$\delta'(q, a) = \{p \mid \delta(p, a) = q\}$ Kante umdrehen

$\delta'(s, a) = \{p \mid \delta(p, a) \in F\}$ wie alle Zustände aus F

$F' = \{q_0\}$, plus s , falls $\lambda \in L$ am alten Start akzeptieren

→ *umgedrehte Kanten sind nichtdeterministisch*

Lösung Aufgabe 3: warum $L(M) = L^R$

$$w = a_1 \dots a_m \in L: \quad q_0 \xrightarrow{a_1} r_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_m} r_m \in F$$

Lösung Aufgabe 3: warum $L(M) = L^R$

$$w = a_1 \dots a_m \in L: \quad q_0 \xrightarrow{a_1} r_1 \xrightarrow{a_2} \dots \xrightarrow{a_m} r_m \in F$$

$$\text{umgedreht in } M: \quad s \xrightarrow{a_m} r_{m-1} \xrightarrow{a_{m-1}} \dots \xrightarrow{a_1} q_0$$

Also akzeptiert M das Wort $w^R = a_m \dots a_1$, und umgekehrt genauso. Nach Satz 3.2 ist L^R regulär. □

Noch drei Aufgaben



Aufgabe 4:

Entwerfen Sie eine TM M , die genau die Palindrome über $\{a, b\}$ akzeptiert, also $L(M) = \{w \in \{a, b\}^* \mid w = w^R\}$.



Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass jeder NEA für $L_k = \{x1y \mid x \in \Sigma_{\text{bool}}^*, y \in \Sigma_{\text{bool}}^{k-1}\}$ mindestens $k + 1$ Zustände hat.



Aufgabe 6:

Konstruieren Sie für jedes $n \geq 1$ einen NEA mit n Zuständen, so dass jeder EA für dieselbe Sprache mindestens 2^n Zustände hat.

Lösung Aufgabe 4: Idee

Wiederhole:

1. erstes Zeichen merken (q_a oder q_b) und durch X ersetzen
 2. nach rechts zum letzten unmarkierten Zeichen
 3. gleich? durch X ersetzen, zurück nach links. Sonst verwerfen.
- Nichts mehr unmarkiert: akzeptieren.

$\text{c}abba \rightarrow \text{c}XbbX \rightarrow \text{c}XXXX \quad \text{akzeptiert}$

$\rightarrow$ jede Runde vergleicht das erste und das letzte Zeichen

Lösung Aufgabe 4: die TM

Eintrag: $\delta(q, x) = (p, y, D)$ mit $D \in \{L, R, N\}$. Leere Felder gehen nach q_{reject} .

	$\mathbb{C}$	a	b	X	$\sqcup$
q_0	$(q_1, \mathbb{C}, R)$				
q_1		(q_a, X, R)	(q_b, X, R)	$(q_{\text{accept}}, X, N)$	$(q_{\text{accept}}, \sqcup, N)$
q_a		(q_a, a, R)	(q_a, b, R)	(q'_a, X, L)	$(q'_a, \sqcup, L)$
q'_a		(q_z, X, L)		$(q_{\text{accept}}, X, N)$	
q_b		(q_b, a, R)	(q_b, b, R)	(q'_b, X, L)	$(q'_b, \sqcup, L)$
q'_b			(q_z, X, L)	$(q_{\text{accept}}, X, N)$	
q_z		(q_z, a, L)	(q_z, b, L)	(q_1, X, R)	

„ q_a, q_b merken sich das linke Zeichen, q_z läuft zurück.“

Lösung Aufgabe 5

Angenommen, ein NEA M für L_k hat höchstens k Zustände.

$w = 10^{k-1} \in L_k$ hat eine akzeptierende Berechnung durch $k + 1$ Zustände $r_0, \dots, r_k$.

Lösung Aufgabe 5

Angenommen, ein NEA M für L_k hat höchstens k Zustände.

$w = 10^{k-1} \in L_k$ hat eine akzeptierende Berechnung durch $k + 1$ Zustände $r_0, \dots, r_k$.

Schubfach: $r_i = r_j$ für ein $i < j$. Schleife weglassen $\Rightarrow M$ akzeptiert ein kürzeres Wort als k .

Lösung Aufgabe 5

Angenommen, ein NEA M für L_k hat höchstens k Zustände.

$w = 10^{k-1} \in L_k$ hat eine akzeptierende Berechnung durch $k + 1$ Zustände $r_0, \dots, r_k$.

Schubfach: $r_i = r_j$ für ein $i < j$. Schleife weglassen $\Rightarrow M$ akzeptiert ein kürzeres Wort als k .

Aber jedes Wort in L_k hat Länge $\geq k$. Widerspruch.



„Wie beim Pumping-Lemma: Eine Schleife darf man auch weglassen.“

Lösung Aufgabe 6: der NEA

$Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, Start und akzeptierend: q_0

$\delta(q_i, a) = \{q_{i+1 \bmod n}\}$ alle eins weiterdrehen

$\delta(q_i, b) = \emptyset$ alles löschen

$\delta(q_i, c) = \{q_i, q_0\}$ q_0 dazunehmen

Lösung Aufgabe 6: der NEA

$Q = \{q_0, \dots, q_{n-1}\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$, Start und akzeptierend: q_0

$\delta(q_i, a) = \{q_{i+1 \bmod n}\}$ alle eins weiterdrehen

$\delta(q_i, b) = \emptyset$ alles löschen

$\delta(q_i, c) = \{q_i, q_0\}$ q_0 dazunehmen

Plan: Jede Menge $P \subseteq Q$ ist erreichbar, und je zwei Mengen lassen sich trennen. Dann braucht jeder EA 2^n Zustände.

Lösung Aufgabe 6: alles erreichbar

Beispiel $n = 5$, $P = \{q_1, q_3, q_4\}$:

$$\{q_0\} \xrightarrow{a} \{q_1\} \xrightarrow{c} \{q_0, q_1\} \xrightarrow{aa} \{q_2, q_3\} \xrightarrow{c} \{q_0, q_2, q_3\} \xrightarrow{a} \{q_1, q_3, q_4\}$$

Allgemein: von oben nach unten aufbauen. Drehen, q_0 dazunehmen, weiterdrehen.

$\emptyset$ erreicht man mit b .

→ *Drehen ändert die Abstände nicht*

Lösung Aufgabe 6: alle verschieden

Seien $P \neq P'$ mit $q_i \in P$, aber $q_i \notin P'$.

$z = a^{n-i}$ dreht q_i genau auf q_0 , sonst landet nichts auf q_0 :

von P aus: q_0 erreicht, akzeptiert

von P' aus: q_0 nicht erreicht, verwirft

Nach Lemma 3.3: 2^n verschiedene Zustände.



→ die Potenzmengenkonstruktion ist bestmöglich

Bis nächste Woche!